I L'INDUCTION EN MATHÉMATIQUES*

1. Expérience et opinion.

L'expérience modifie les opinions des hommes. Nous apprenons par expérience ou plutôt nous devrions apprendre par expérience. Tirer le meilleur parti possible de l'expérience est l'une des grandes tâches humaines et travailler à cette tâche est la vocation particulière des savants.
Un savant digne de ce nom cherche à parvenir à l'opinion la plus correcte possible à partir d'une expérience donnée et à acquérir l'expérience la meilleure pour arriver à l'opinion la plus correcte sur une question donnée. Le processus de la pensée du savant dans l'utilisation de l'expérience est généralement appelé *induction.* On peut trouver des exemples particulièrement clairs du processus inductif dans la recherche mathématique. Nous étudierons un exemple simple dans la section qui suit.

2. Points de contact suggestifs.

L'induction commence souvent avec l'observation. Un naturaliste peut observer la vie des oiseaux, un cristallographe les formes des cristaux. Le mathématicien, qui s'intéresse à la théorie des nombres, observe les propriétés des entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc..
Si vous désirez observer la vie des oiseaux (avec quelque chance d'obtenir des résultats intéressants), vous devez avoir une certaine habitude de ces derniers, vous devez vous intéresser à eux, peut-être même devez-vous les aimer. De la même manière, si vous désirez observer les nombres, vous devez vous y intéresser et être quelque peu familiarisé avec eux. Vous devez distinguer les nombres pairs des nombres impairs, vous devez connaître les carrés parfaits 1, 4, 9, 16, 25, etc. et les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc..
(Il est préférable de mettre 1 de côté, en le considérant comme l' «unité», et de ne pas le classer avec les nombres premiers.) Même avec un bagage aussi modeste que celui-ci vous pouvez observer des choses intéressantes.

Supposons que par hasard vous rencontriez les relations

* Ce texte est le 1er chapitre du livre de G. Pólya "Les mathématiques et le raisonnement plausible", traduit de l'anglais par R. Vallée (CNRS). Il met en évidence le parallélisme entre la démarche scientifique d'un naturaliste et d'un mathématicien.

$$3 + 7 = 10,\ \ 3 + 17 = 20,\ \ 13 + 17 = 30$$

et que vous remarquiez une certaine ressemblance entre elles. Vous êtes frappé par le fait que les nombres 3, 7, 13 et 17 sont des nombres premiers impairs. La somme de deux nombres premiers impairs est nécessairement un nombre pair ; en fait, 10, 20 et 30 sont pairs. Mais que penser des autres nombres *pairs.* Se comportent-ils de la même manière ? Le premier nombre pair qui soit somme de deux nombres premiers impairs est, naturellement,

$$6 = 3 + 3.$$

Après le nombre 6, nous voyons que

$$\begin{aligned} 8 &= 3 + 5 \\ 10 &= 3 + 7 = 5 + 5 \\ 12 &= 5 + 7 \\ 14 &= 3 + 11 = 7 + 7 \\ 16 &= 3 + 13 = 5 + 11. \end{aligned}$$

Cela continuera-t-il ainsi indéfiniment ? Quoi qu'il en soit les cas particuliers observés suggèrent une proposition de caractère général : *Tout nombre entier supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers impairs*. L'examen des cas d'exception, 2 et 4, correspondant à des nombres qui ne peuvent être décomposés en une somme de deux nombres premiers impairs, conduit à préférer la proposition plus complexe suivante : Tout nombre entier qui n'est ni un nombre premier ni le carré d'un nombre premier, est la somme de deux nombres premiers impairs.

Nous avons ainsi fait une *hypothèse* (au sens des physiciens). Nous y sommes parvenus par *induction*. C'est-à-dire qu'elle nous a été suggérée par l'observation, qu'elle nous a été indiquée par des exemples particuliers.

Ces indices sont assez peu convaincants ; les bases sur lesquelles fonder notre hypothèse sont encore peu solides. Nous pouvons, néanmoins, trouver quelque consolation dans le fait que le mathématicien Goldbach, qui l'émit il y a un peu plus de deux cents ans, ne possédait pas de justification meilleure.

L'hypothèse de Goldbach est-elle vraie ? Personne ne peut aujourd'hui répondre à cette question. En dépit des efforts de quelques grands mathématiciens, l'hypothèse de Goldbach se trouve être, comme au temps d'Euler, l'une de ces «nombreuses propriétés des nombres qui nous sont familières mais que nous ne sommes pas encore capables de prouver» ou de réfuter.

Revenons maintenant en arrière et essayons de discerner quelles étapes, dans le raisonnement précédent, peuvent être considérées comme typiques de la démarche inductive.

Tout d'abord *nous avons noté une certaine ressemblance*. Nous avons remarqué que 3, 7, 13 et 17 sont premiers, 10, 20 et 30 pairs et que les trois équations 3 + 7 = 10, 3 + 17 = 20, 13 + 17 = 30 sont analogues entre elles.

Puis il y eut une étape de *généralisation*. Des cas particuliers 3, 7,13 et 17 nous sommes passé à tous les nombres premiers impairs, de 10, 20 et 30, à tous les nombres pairs, puis de là à une relation peut-être générale

nombre pair = nombre premier + nombre premier.

Nous sommes arrivés ainsi à une proposition générale clairement formulée, qui est néanmoins seulement une hypothèse, seulement un essai. Cela signifie que la proposition n'est nullement prouvée ; elle ne peut prétendre être vraie, elle représente seulement une tentative pour parvenir à la vérité.
Cette hypothèse présente, néanmoins, quelques *points de contact suggestifs* avec l'expérience, avec «les faits», avec la «réalité». Elle est vraie pour les nombres pairs particuliers 10, 20, 30, et aussi pour 6, 8, 12, 14, 16.
Les remarques précédentes nous ont montré une première étape de la démarche inductive.

3. Points de contact apportant une confirmation.

On ne doit pas accorder une confiance trop grande à une hypothèse non prouvée, même si un homme de grande autorité l'a proposée, même si on l'a proposée soi-même.
On doit essayer de la prouver ou de la réfuter ; on doit l'*éprouver*.
Nous faisons subir une épreuve à l'hypothèse de Goldbach si nous examinons quelque nouveau nombre pair et décidons s'il est ou s'il n'est pas la somme de deux nombres premiers impairs. Examinons, par exemple, le nombre 60. Réalisons une «quasi-expérience», comme dit Euler.
Le nombre 60 est pair, mais est-il la somme de deux nombres premiers ?
Est-il exact que

60 = 3 + nombre premier ?

Non, 57 n'est pas premier. Est-ce que

60 = 5 + nombre premier ?

La réponse est encore «non»: 55 n'est pas premier. Si cela continue ainsi l'hypothèse devra être rejetée. Néanmoins l'essai suivant donne

$$60 = 7 + 53$$

et 53 est un nombre premier. L'hypothèse a été vérifiée une nouvelle fois.

La circonstance opposée aurait réglé une fois pour toutes le sort de l'hypothèse de Goldbach. Si en essayant tous les nombres premiers inférieurs à un nombre pair donné, tel que 60, on ne parvient jamais à une décomposition en une somme de deux nombres premiers, on est conduit à rejeter I'hypothèse de façon irrévocable. Ayant vérifié l'hypothèse dans le cas du nombre pair 60, on ne peut parvenir à une conclusion aussi nette. On ne prouve certainement pas le théorème par une vérification unique. Il est néanmoins naturel d'interpréter une telle vérification comme un *signe favorable* à l'hypothèse, comme un signe susceptible d'augmenter son *crédit*, bien que l'importance à attacher à ce signe favorable dépende du jugement de chacun.
Revenons au nombre 60. Après avoir essayé les nombres entiers 3, 5 et 7, nous pouvons essayer les autres nombres premiers inférieurs à 30. (Il est clair qu'il n'est pas nécessaire d'aller au-delà de 30, égal à 60/2, puisque l'un des deux nombres premiers, dont la somme doit être 60, est obligatoirement inférieur à 30.) Nous obtenons ainsi toutes les décompositions possibles de 60 en une somme de deux nombres premiers:

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$$

Nous pouvons continuer systématiquement et examiner les nombres pairs les uns après les autres, comme nous l'avons fait pour le seul nombre 60.
Nous pouvons construire un *tableau* des résultats :

$$\begin{aligned}
6 &= 3 + 3\\
8 &= 3 + 5\\
10 &= 3 + 7 = 5 + 5\\
12 &= 5 + 7\\
14 &= 3 + 11 = 7 + 7\\
16 &= 3 + 13 = 5 + 11\\
18 &= 5 + 13 = 7 + 11\\
20 &= 3 + 17 = 7 + 13\\
22 &= 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11\\
24 &= 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13\\
26 &= 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13\\
28 &= 5 + 23 = 11 + 17\\
30 &= 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17.
\end{aligned}$$

L'hypothèse est vérifiée dans tous les cas examinés ici. Toute vérification qui permet d'enrichir le tableau renforce l'hypothèse, la rend plus vraisemblable, plus plausible.
Ce n'est certes pas avec ces vérifications-là que nous pouvons prouver l'hypothèse. Nous devons examiner les observations que nous avons réunies, nous devons les comparer et les associer, nous devons chercher les indices qui peuvent s'y trouver cachés. Dans le cas qui nous occupe il est très difficile de trouver un indice important dans le tableau, mais en l'examinant, nous pouvons

parvenir à comprendre plus clairement la signification de l'hypothèse. Ce tableau montre avec quelle fréquence les nombres pairs, qui s'y trouvent inscrits, peuvent être représentés par une somme de deux nombres premiers (6 une fois seulement, 30 trois fois). Le nombre de ces décompositions du nombre pair $2n$ semble «croître irrégulièrement» avec n.

L'hypothèse de Goldbach exprime l'espoir de ne pas voir le nombre de ces décompositions s'annuler, si loin que nous étendions le tableau.
Les cas particuliers que nous avons examinés sont de deux espèces : ceux qui ont précédé la formulation de l'hypothèse et ceux qui sont venus après.
Les premiers ont suggéré l'hypothèse, les seconds l'ont confirmée. Ces deux sortes de cas fournissent chacun un contact entre l'hypothèse et «les faits».
Le tableau ne fait aucune distinction entre les points de contact «suggestifs» et ceux qui sont «confirmatifs».

Revenons maintenant au raisonnement précédent et essayons d'y déceler des traits caractéristiques de la démarche inductive.
Ayant conçu une hypothèse, nous avons essayé de découvrir si elle était vraie ou fausse. Notre hypothèse était une proposition de caractère général suggérée par certains cas particuliers où nous avions remarqué qu'elle était vraie. Nous avons par la suite examiné quelques exemples supplémentaires.
L'hypothèse s'étant trouvée être vraie dans tous les cas examinés, notre confiance s'en trouve augmentée.
Nous n'avons, il me semble, rien fait que de raisonnable. En agissant ainsi nous faisons confiance au principe suivant : *Le crédit d'une proposition hypothétique de caractère général augmente lorsque celle-ci a été vérifiée sur un nouveau cas particulier*.

Est-ce là le principe sous-jacent à la démarche inductive ?

4. L'attitude inductive.

Au cours de notre vie nous nous attachons souvent à des illusions. C'est-à-dire que nous n'osons pas mettre à l'épreuve certaines de nos opinions qui pourraient facilement être infirmées par l'expérience, parce que nous craignons de rompre notre équilibre affectif. Il peut se trouver des circonstances où il ne soit pas déraisonnable de s'attacher à des illusions, mais quand il s'agit de science une attitude tout à fait différente est nécessaire, c'est l'*attitude inductive*. Cette attitude nous conduit à contrôler nos opinions par l'expérience de façon aussi efficace que possible.

Elle demande un certain goût pour les faits. Elle demande de savoir s'élever des observations aux généralisations et de savoir redescendre des généralisations les plus hardies aux observations les plus concrètes. Elle demande de dire «peut-être» avec mille nuances différentes. Elle demande beaucoup d'autres choses et tout particulièrement les trois suivantes :

1 - Etre prêt à modifier une opinion personnelle.
2 - Modifier une opinion quand il y a une raison impérative de le faire.
3 - Ne pas modifier une opinion à la légère, c'est-à-dire sans avoir quelque bonne raison pour cela.

Ces remarques semblent banales. Et pourtant des qualités assez rares sont nécessaires pour vivre conformément aux préceptes correspondants.

Le premier précepte exige du «courage intellectuel». Il faut du courage pour modifier ses opinions. Galilée, s'élevant contre les préjugés de ses contemporains et l'autorité d'Aristote, offre un grand exemple de courage intellectuel.

Le second exige de l' «honnêteté intellectuelle». Conserver une hypothèse qui a été clairement infirmée par l'expérience, simplement parce que c'est une hypothèse *personnelle*, ne serait pas honnête.
Le troisième exige une «sage prudence». Changer d'opinion sans motif sérieux, par exemple pour se conformer à une mode, serait peu raisonnable. Néanmoins nous n'avons ni le temps ni la force d'examiner sérieusement toutes nos opinions. Aussi est-il sage de consacrer notre tâche quotidienne aux seules opinions que nous pouvons espérer améliorer, de nous interroger et de faire porter nos doutes sur elles. «Ne croyez pas n'importe quoi, mais doutez seulement de ce qui vaut la peine d'être mis en doute».
Le courage intellectuel, l'honnêteté intellectuelle et une sage prudence sont les qualités morales du savant.